

航空发动机转子系统动力学模型的可逆简化方法

路振勇, 陈予恕, 李洪亮, 侯磊
(哈尔滨工业大学 航天学院, 哈尔滨 150001)

摘 要: 针对航空发动机高压转子系统动力学模型,给出了一种模型可逆简化的方法.首先采用有限元法建立了较为精确的动力学模型,然后基于质心集中方法对该模型进行了不同程度的简化,分别得到了单跨双盘模型和单盘模型,并将其与原始模型进行了临界转速的对比.这是一种从结构特点将实际多盘转子简化成单盘转子的方法,它使得在考虑到支承等非线性因素后利用低维非线性动力学理论进行分析和参数优化成为可能.另一方面,研究了模型简化方法的可逆性,即基于质心位置及总质量最优的原则,由单跨双盘模型的圆盘结构参数反推了多级圆盘的等效内外半径、厚度、位置等参数,构建了新的工程结构模型,对比该模型和原始模型的前 3 阶临界转速,误差均在 3%之内.这种由简化模型参数反推多级圆盘的方法,为 nonlinear 动力学理论优化分析所得到的简化模型优化结构参数反推设计多级圆盘工程结构参数奠定了基础.

关 键 词: 航空发动机转子系统;可逆化模型简化方法;质心集中方法;单跨双盘模型;模型优化;降维

中图分类号: V231.96 **文献标志码:** A

Reversible model-simplifying method for aero-engine rotor systems

LU Zhen-yong, CHEN Yu-shu, LI Hong-liang, HOU Lei
(School of Astronautics, Harbin Institute of Technology, Harbin 150001, China)

Abstract: A reversible simplified method was given to investigate the dynamic model for aero-engine high-pressure rotor system. By using the finite element method, the accurate complex dynamics model was built, and also simplified to gain the single-span with dual-disc model and single-disc model based on the center of mass concentration method. The critical whirling speed was compared for the simplified and complex models to indicate the correctness of the simplified method. This modeling-simplify method based on the structural characteristics made low-dimensional nonlinear dynamics analysis and parameter optimization possible with the consideration of the nonlinear factors of supporting, etc. And then the reversibility of the model-simplifying method was investigated. The new complex model and the discs' parameters of equivalent radius, thickness and location were obtained from the single-span with dual-disc model by the principle of optimized centroid location and the total mass of the discs. The 1th to 3th critical whirling speeds of the new complex model and the original model were compared, indicating that the errors were all less than 3%. The reversible model-simplifying method laid the foundation for the multistage-disc's engineering structural parameters design from the simple model structural parameters optimized by the nonlinear dynamics theory.

Key words: aero-engine rotor system; reversible model-simplifying method; center of mass concentration method; single-span with dual-disc model; model optimization; dimensionality reduction

转子系统是航空发动机的核心结构,研究航空发动机转子系统的动力学行为,离不开合理简化的动力学模型. 陈予恕等^[1]对航空发动机整机动力学进行了综述与展望,指出针对航空发动机的结构和工作特点建立合适的简化模型,通过简化模型定性研究一些重要参数对系统运动行为的规律性影响对航空发动机系统的设计优化和动态行为的控制有重要的意义. 陈果^[2]用有限元法建立了实际的双转子航空发动机的整机振动模型,模型中高、低压转子系统的圆盘均简化为双盘,在对整机振动系统实验验证时采用了单跨三盘模型^[3]. 胡绚等^[4]研究了航空发动机双转子系统反向旋转稳态响应,模型中双转子系统的高低压转子的圆盘均简化为单圆盘. Chiang 等^[5]研究汽轮机转子系统的临界转速、振型等动力学特性时,单转子系统简化为单跨三盘模型,双转子系统的高低压转子系统的圆盘分别简化为双盘. 这些模型均是自由度相对较低的简单模型,适用于研究非线性动力学系统的定性性质,但模型参数与工程实际系统参数的对应关系没有给出.

研究转子系统的线性问题,可用自由度很大的复杂模型,然而对于非线性问题,必须采用能用于非线性理论分析的简化模型. 文献[6-11]分别研究了转子系统的裂纹故障^[6-7]、碰摩故障^[8-9]、轴承非线性油膜力^[10-11]问题的非线性动力学行为,文献中为满足计算等要求而均直接采用 Jeffcott 模型(单跨单盘)或单跨双盘模型等简化模型,而未给出简化模型的由来及简化方法,未对简化模型的实用性、可用性论证.

在工程计算中,转子系统的优化设计大多以线性振动理论为依据应用有限元软件完成. Nandi 等^[12],张力等^[13],王国丽等^[14]分别用有限元软件建立了发动机转子的多圆盘贴近实际的有限元模型,模型中一般将叶片等效为刚性圆环或圆盘,采用实体单元或对比梁单元建模,然后对系统的动力学特性进行计算. 有限元软件建立的模型结构复杂,适合用于线性动力学特性的定量计算,对于非线性问题的定量分析计算效率较低,并且难以实现非线性动力学的定性分析.

本文提出了航空发动机转子系统动力学模型的一种可逆化简化方法,该方法首先基于有限元

法建立转子系统较为精确的复杂模型,然后基于质心集中方法对该模型进行简化降维,可得到适用于非线性转子动力学分析的简单模型,如单跨双盘模型和单盘模型. 这是一种从结构特点将实际多盘转子简化成单盘转子的方法,它使得在考虑到支承等非线性因素后利用低维非线性动力学理论进行分析和参数优化成为可能. 另一方面,基于质心位置及总质量最优的原则可从简化模型反推得到新工程结构模型,该模型与系统原始模型虽然并不完全相同,但两者可进行对比从而定量地分析临界转速误差,在满足精度要求时,表明这种模型简化方法具有可逆性. 这种由简化模型参数反推多级圆盘的方法为由非线性动力学理论优化分析所得到的简化模型优化结构参数反推设计多级圆盘结构工程参数奠定了基础. 工程设计者可根据系统的结构与工艺要求等因素选用合适的反推模型参数.

1 系统建模

某型航空发动机的高压转子系统如图 1 所示,高压转子支承系统为二支点结构,采用 1-0-1 转子支承方案,支承在前后两个支点上. 系统共计 11 级圆盘,其中高压压气机 9 级加一个封严篦齿盘,高压涡轮 1 级. 转子由 3 段组成,第 1 段包括第 1 至第 3 级盘,为悬臂端结构;第 2 段包括第 4 至第 6 级盘;第 3 段包括第 7 至第 9 级盘和一个封严篦齿盘;其间联接均为焊接. 第 1 和第 2 段是鼓盘式结构,第 1 段、第 2 段和前轴颈由短螺栓联接,第 2 段、第 3 段和后轴由长螺栓联接^[15-16].

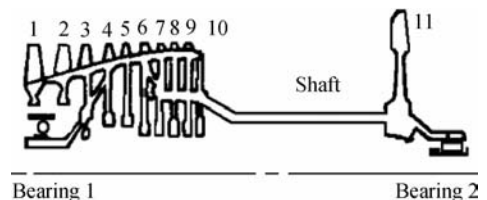


图 1 发动机高压转子系统

Fig. 1 Aero-engine high pressure rotor system

根据该航空发动机高压转子系统的结构形式、工作原理等,建立了高压转子系统较为精确的复杂动力学离散模型 model A.

Model A 建模假设如下:

1) 高压压气机 1~9 级转盘和封严篦齿盘、高压涡轮盘分别等效为 11 级空心的圆盘,以集中质量形式集中在其质心位置,每级圆盘上的叶片参数集中到相应的圆盘上。 $R_j, r_j, d_j, m_j, J_{pj}, J_{dj}$ ($j=1,3,\dots,11$) 分别表示第 j 级圆盘等效的外半径、内半径、厚度、质量、极转动惯量和直径转动惯量;

2) 转轴简化为等截面的环形空心梁,采用 Timoshenko 梁-轴单元,不考虑转轴的扭转及轴向力的影响,仅考虑转子的横向弯曲振动;

3) 支承处均简化为各向同性的线性弹性支承。

复杂力学模型中,坐标系及节点的选择如图 2 所示。将悬臂端 1~3 级高压压气机盘的质量和转动惯量集中到第 3 级盘上得到第①级圆盘,位于节点 2 处,第 4~9 级盘和封严篦齿盘分别为②~⑧级圆盘位于节点 3~9,高压涡轮盘简化为 1 个带有质量的转动空心圆盘为第⑨级位于节点 10;盘之间由均质的空心轴段连接;支承简化为各向同性的弹性支承,前支承简化在最左端,即节点 1 处,后支承位于高压涡轮轴的最右端,即节点 11 处。圆盘的参数表示为:质量 m_i 、极转动惯量 J_{pi} 、直径转动惯量 J_{di} , $i=1,3,\dots,9$ 。

$$\begin{aligned} m_1 &= \sum_{j=1}^3 m_j, m_i = m_{j+2} \\ (i &= 2, 3, \dots, 9, j = i) \\ J_{p1} &= \sum_{j=1}^3 J_{pj}, J_{pi} = J_{pj+2} \\ (i &= 2, 3, \dots, 9, j = i) \\ J_{d1} &= \sum_{j=1}^3 J_{dj}, J_{di} = J_{dj+2} \\ (i &= 2, 3, \dots, 9, j = i) \end{aligned} \quad (1)$$

本文中支承均简化成各项同性的线性弹性支承,根据转子动力学知识^[17-18],分别分析刚性圆盘、轴段单元、支承的运动方程,采用有限单元法,由 Lagrange 方程得系统的运动微分方程为

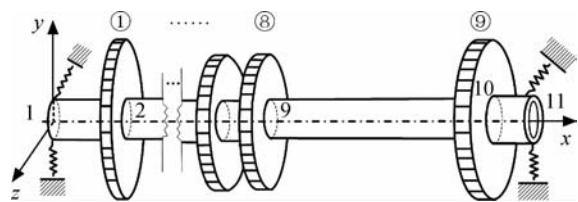


图 2 发动机高压转子系统力学模型

Fig. 2 Model for aero-engine high pressure rotor system

$$\mathbf{M}_1 \ddot{\mathbf{q}}_1 + \Omega \mathbf{J}_1 \dot{\mathbf{q}}_2 + \mathbf{K}_1 \mathbf{q}_1 = \mathbf{0} \quad (2)$$

$$\mathbf{M}_1 \ddot{\mathbf{q}}_2 - \Omega \mathbf{J}_1 \dot{\mathbf{q}}_1 + \mathbf{K}_1 \mathbf{q}_2 = \mathbf{0}$$

其中

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_1 &= [\gamma_1, \theta_{\gamma_1}, \gamma_2, \theta_{\gamma_2}, \dots, \gamma_N, \theta_{\gamma_N}]^T \\ \mathbf{q}_2 &= [z_1, \theta_{z_1}, z_2, \theta_{z_2}, \dots, z_N, \theta_{z_N}]^T \end{aligned} \quad (3)$$

式中 $\mathbf{M}_1, \mathbf{K}_1, \Omega \mathbf{J}_1$ 为系统的质量矩阵、刚度矩阵和回转矩阵,由系统的单元质量矩阵、单元的刚度矩阵和单元回转矩阵总装而成, Ω 为转子自转角速度, n 为系统的节点数。此转子系统转子长径比较小,故采用 Timoshenko 梁-轴单元,单元矩阵见文献[17]。

式(2)的解可写成

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_1 &= A\phi \cos(\omega t + \alpha) \\ \mathbf{q}_2 &= A\phi \sin(\omega t + \alpha) \end{aligned} \quad (4)$$

代入式(2)可得

$$(-\mathbf{M}_1 \omega^2 + \mathbf{J}_1 \Omega \omega + \mathbf{K}_1) \phi = \mathbf{0} \quad (5)$$

频率方程为

$$|-\mathbf{M}_1 \omega^2 + \mathbf{J}_1 \Omega \omega + \mathbf{K}_1| = 0 \quad (6)$$

用有限元法建立了转子系统的运动微分方程后,通过式(6)可求得当 $\Omega = \omega$ 时转子系统的临界转速及相应振型 ϕ 。

2 模型简化

2.1 简化模型的建立

在非线性理论分析中,需要降低系统的自由度。根据系统的结构及计算要求对复杂系统进行简化降维意义重大。简化模型建模假设如下:保持轴承位置不变;轴段参数不变;对圆盘参数、个数及位置进行简化。

1) 单跨双盘模型 model B

质心集中简化方法:主要考虑系统的运动为横向弯曲振动,将各级压气机圆盘集中到其质心位置为圆盘①,将各级涡轮圆盘集中到其质心位置为圆盘②;轴段参数及支承参数不变。此方法保证了系统中简化后圆盘的质量和转动惯量不变,实际保证了简化前后静态下圆盘对左支承点的弯矩总和不变。简化后的单跨双盘模型如图 3 所示,

$$\begin{aligned} \text{圆盘①的参数 } \bar{m}_1 &= \sum_{i=1}^8 m_i \bar{J}_{p1} = \sum_{i=1}^8 J_{pi}, \bar{J}_{d1} = \\ &\sum_{i=1}^8 J_{di}; \text{圆盘②的参数 } \bar{m}_2 = m_9, \bar{J}_{p2} = J_{p9}, \\ &\bar{J}_{d2} = J_{d9}. \end{aligned}$$

2) 单跨单盘模型 model C

根据前面简化系统的计算结果,对系统继续简化为理论分析中常用的单跨单盘模型如图 4 所示.简化等效方法:系统质心集中,简化后模型只有一个圆盘,位于系统的质心处;轴段参数及支承参数不变.简化后,圆盘的参数为: $\bar{m} = \sum_{i=1}^9 m_i$,

$$\bar{J}_p = \sum_{i=1}^9 J_{pi}, \bar{J}_d = \sum_{i=1}^9 J_{di}.$$

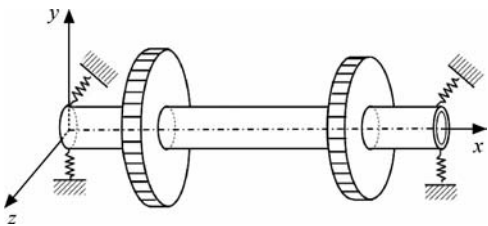


图 3 简化模型 model B

Fig. 3 Simplified rotor system; model B

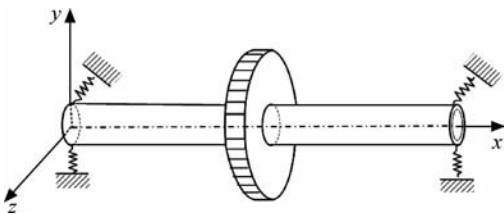


图 4 单盘简化模型

Fig. 4 Simplified rotor system; single-disc model

2.2 计算结果分析

本节分别计算了不同弹性支承系数下简化模型和复杂模型的临界转速大小以及相对误差大小.支承为各向同性弹性支承,弹性支承刚度由 1×10^4 N/m 变化到 9×10^9 N/m. $\omega_j(i)$ 代表不同模型的各阶临界转速,其中 $i=1,2,3\cdots, j=B,C$,模型 j 的第 i 阶临界转速相对于模型 A 第 i 阶临界转速的误差 $s_j(i)$ 表示为

$$s_j(i) = \frac{|\omega_j(i) - \omega_A(i)|}{\omega_A(i)} \times 100\%$$

$$i = 1,2,3\cdots, j = B,C \tag{7}$$

图 5 计算了复杂模型 model A 和单跨双盘模型 model B 的前两阶临界转速,单跨单盘模型 model C 的第 1 阶临界转速,图 6 分析了 model B 的前两阶临界转速分别相对于 model A 前两阶临界转速的误差,model C 的第 1 阶临界转速相对于 model A 第 1 阶临界转速的误差.

分析图 5 和图 6 可知,按照质心集中简化的

方法,随着支承刚度的增加单跨双盘模型的两阶临界转速和复杂模型很接近,变化不大,且相对误差大小均在 5% 之内;单跨单盘模型的第 1 阶临界转速在支承刚度相对误差在小于 2×10^7 N/m 的情况下在 10% 之内,随着支承刚度的继续增

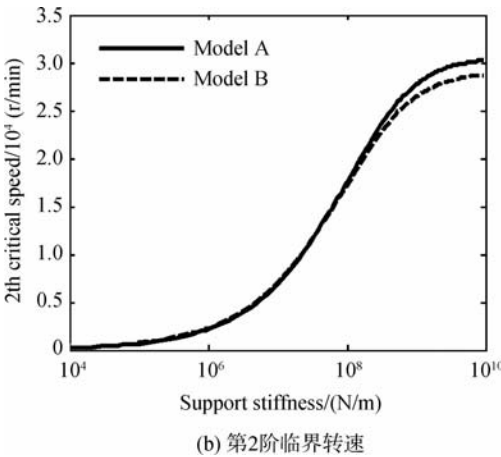
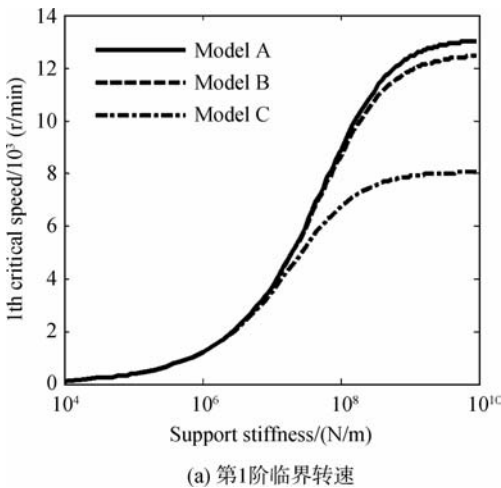
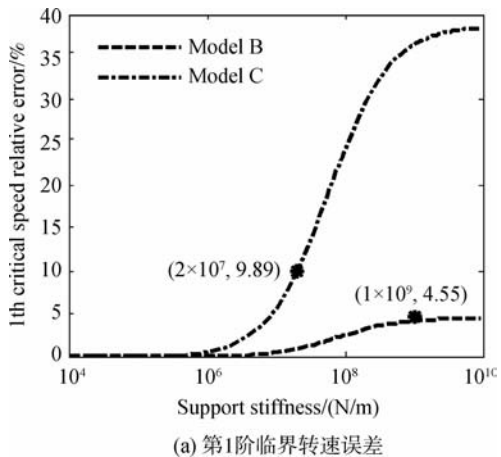


图 5 临界转速随支承刚度的变化
Fig. 5 Critical speeds versus the support stiffness



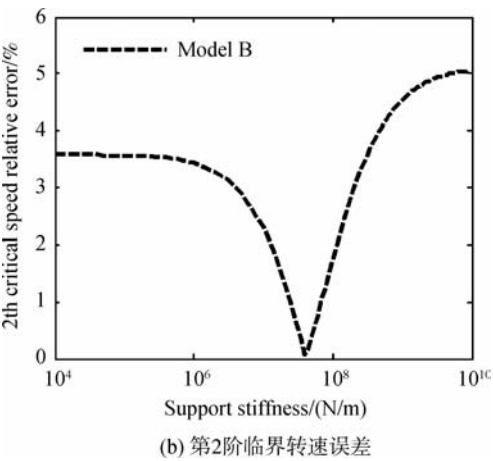


图 6 临界转速的相对误差随支承刚度的变化
Fig. 6 Critical speed relative error versus the support stiffness

加,临界转速数值相差越来越大,相对误差可达到 30%之多.表明,单跨单盘模型在支承刚度相对于转轴本身较小时可作为简化模型应用,单跨双盘模型可很好的反映原模型的动力学特性.

表 1 给出了不同支承刚度下系统的模态振型图分析,可知,系统的振型图为轴段的弯曲振型,复杂模型的前两节振型图与单跨双盘简化模型形状基本一致;单盘简化模型的 1 阶振型图与复杂模型基本一致;在支承刚度较小的情况下,转轴刚度远大于支承刚度,系统表现为刚性转子的运动特性:平移运动和俯仰运动;随着支承刚度增加,转子表现为柔性转子的运动特性:转轴发生横向弯曲运动.

表 1 不同支承刚度下系统的模态振型图
Table 1 Model shape versus the support stiffness for different models

模型	刚度/(N/m)			
	10 ⁶	5×10 ⁶	2×10 ⁷	5×10 ⁸
A				
B				
C				

3 简化模型到复杂模型的反推

3.1 新模型的建立

低自由度模型广泛并且较好地运用于转子系统非线性理论分析之中,但低自由度模型难以用于指导实际工程设计,因此,根据低自由度模型参数得到实际工程结构复杂模型的尺寸参数具有重要意义.本节根据简化模型 model B 的参数去反推得到了新的复杂模型 model A1.

根据 model B 的参数(可假想这是根据简化模型经非线性动力学理论分析所得的优化参数)去返求 model A1(如图 1 所示)的参数,即由双盘

模型返回 11 级盘的模型,轴段参数不变,根据压气机增压原理,各圆盘参数确定如下:

固定涡轮盘位置及参数不变,即图 1 中 11 级圆盘不变;图 4 中保证第 10 级圆盘位置不变然后使 1~10 级圆盘等间距分部;然后固定第 1 级压气机圆盘外半径为 R ,第 j 级圆盘的外半径为 $R-j\times\Delta R$, ($j=1,3,\cdots,10$), ΔR 为圆盘外半径的递减,可得

$$m_j = \rho\pi(R_j^2 - r_j^2)d_j$$
$$J_{pj} = \frac{1}{2}m_j(R_j^2 + r_j^2)$$
$$J_{dj} = \frac{1}{12}m_j[3(R_j^2 + r_j^2) + d_j^2]$$

(8)

1~3 级圆盘为悬臂结构,计算时把 1~3 级集中到第 3 级圆盘位置,从而可得图 2 所示模型中的①~⑨级圆盘的新参数

$$m_1 = \sum_{j=1}^3 m_j, m_i = m_{j+2} (i = 2, 3, \cdots, 9, j = i)$$
$$J_{p1} = \sum_{j=1}^3 J_{pj}, J_{pi} = J_{pj+2} (i = 2, 3, \cdots, 9, j = i)$$
$$J_{d1} = \sum_{j=1}^3 J_{dj}, J_{di} = J_{dj+2} (i = 2, 3, \cdots, 9, j = i)$$

(9)

3.2 计算结果分析

由上述计算方法,取第 1 级圆盘的等效外半径 $R=0.28\text{m}$,压气机 1~5 级圆盘的等效半径为 0.098m ,6~10 级圆盘的等效内半径为 0.07m ,调整外半径的减小梯度,可得表 2 所示的不同减

小梯度下新模型的压气机质心位置和压气机总质量以及误差.可知当 ΔR 取 0.005m 和 0.006m 时误差均在 5%之内.

取 $\Delta R=0.006\text{m}$,可得 model A1 的各级圆盘的参数,由频率方程式(6)可得图 7~图 9 所示的不同模型的第 1~3 阶临界转速及和原模型的相应误差.由图 7~图 9 可知,不同的支承刚度下新模型 model A1 的前 3 阶临界转速和原模型 model A 非常相近,误差均在 3%之内,新模型保有原系统的动力学特性,表明基于质心位置及总质量最优原则由简化模型反推复杂模型的圆盘参数的计算方法能为工程设计提供一定的参考,说明了本文的简化方法是可逆的,能由低自由度简化模型反推到复杂模型.工程设计者可根据系统的结构与工艺要求等因素选用合适的反推模型参数.

表 2 Model A1 的参数及计算结果
Table 2 Parameters and results for model A1

参数	数值							
外半径减小梯度 $\Delta R/\text{m}$	0.001	0.002	0.003	0.004	0.005	0.006	0.007	0.008
Model A1 压气机质心位置/m	0.271	0.269	0.266	0.264	0.261	0.258	0.255	0.252
Model A1 压气机总质量/kg	89.76	85.85	82.04	78.34	74.74	71.24	67.84	64.54
总质量误差/%	25.11	19.66	14.36	9.20	4.17	-0.71	-5.44	-10.04
质心位置误差/%	0.21	-0.65	-1.55	-2.50	-3.49	-4.53	-5.62	-6.77

注:Model A 压气机质心位置为 0.271m ,压气机所有圆盘的总质量为 71.74kg .

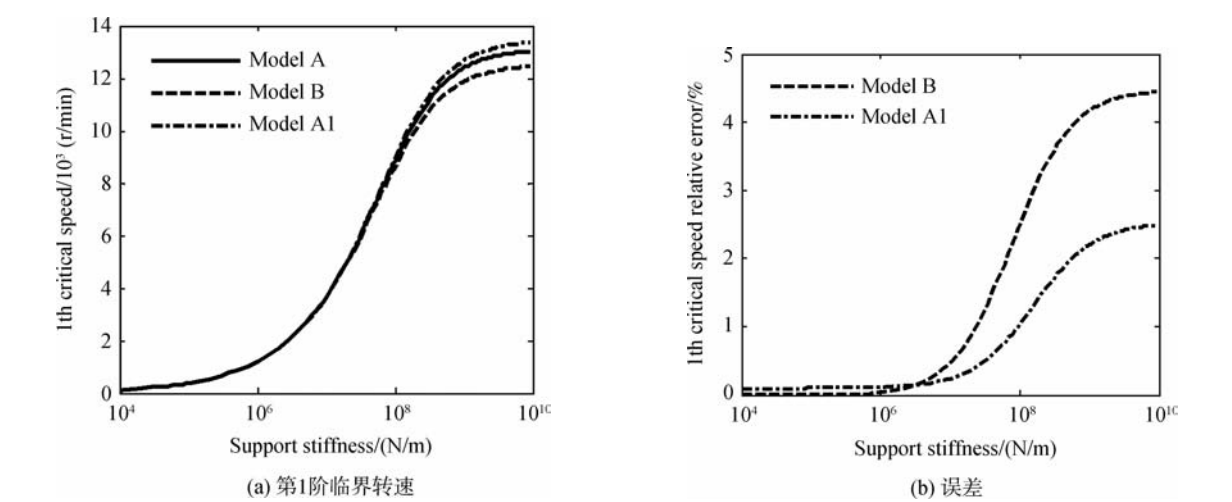


图 7 第 1 阶临界转速随支承刚度的变化及误差

Fig. 7 The 1th critical speed and relative error versus the support stiffness

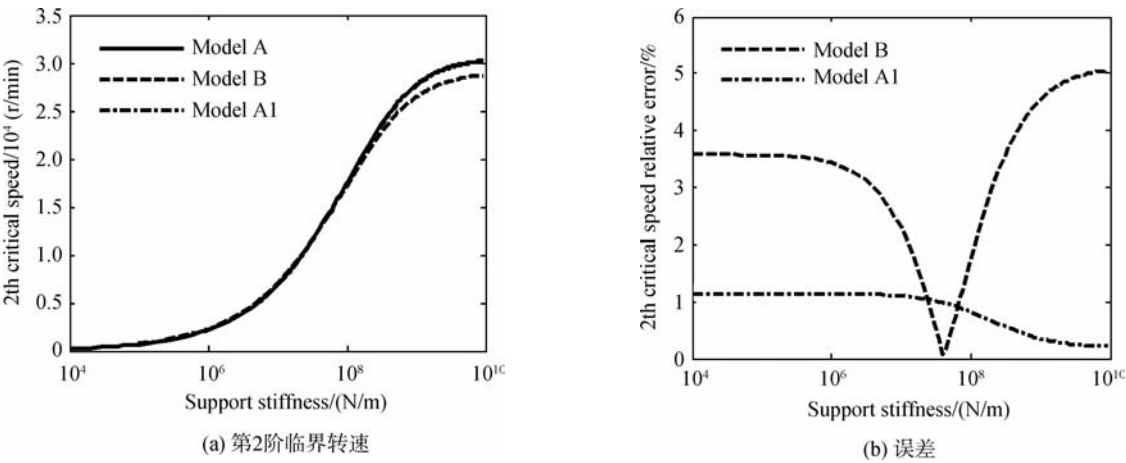


图 8 第 2 阶临界转速随支承刚度的变化及误差

Fig. 8 The 2th critical speed and relative error versus the support stiffness

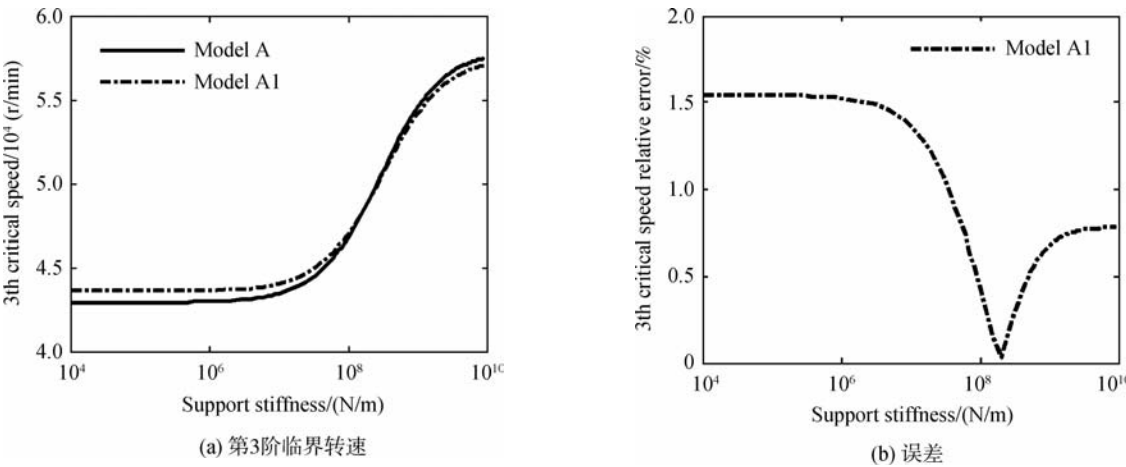


图 9 第 3 阶临界转速随支承刚度的变化及误差

Fig. 9 The 3th critical speed and relative error versus the support stiffness

4 结 论

针对某型航空发动机高压转子系统,基于有限元法建立了该系统的动力学模型,基于质心集中的原则对该模型进行了简化降维,得到了单跨双盘模型和单盘转子模型. 另一方面,基于质心位置及总质量最优的原则由单跨双盘模型反推得到了新的复杂模型. 并采用 Timoshenko 梁-轴单元对模型进行了临界转速及误差、模态振型图的计算,主要结论如下:

1) 简化得到的单跨双盘模型很好地保有了原系统的动力学特性,而单跨单盘模型在支承刚度相对于转轴刚度较小的情况仍可较好地反映原系统的动力学特性,表明采用质心集中的简化方法将转子系统的复杂模型简化为低自由度的简单模型的定量误差是可以接受的. 这是一种从结构特点将实际多盘转子简化成单盘转子的方法,它

使得在考虑到支承等非线性因素后利用低维非线性动力学理论进行分析和参数优化成为可能.

2) 由单跨双盘模型反推得到的新的工程结构复杂模型和原模型具有十分相近的动力学特性,表明本文的简化方法是具有可逆性的,并进一步说明该简化方法的合理性. 这种由简化模型参数反推多级圆盘的方法为由非线性动力学理论优化分析所得到的简化模型参数反推设计多级圆盘工程结构参数奠定了基础. 工程设计者可根据系统的结构与工艺要求等因素选用合适的反推模型参数.

参考文献:

[1] 陈予恕,张华彪. 航空发动机整机动力学研究进展与展望[J]. 航空学报,2011,32(8):1371-1391.
CHEN Yushu,ZHANG Huabiao. Review and prospect on the research of dynamics of the aero-engine system[J]. Acta Aeronautica et Astronautica Sinica,2011,32(8):1371-

1391. (in Chinese)

[2] 陈果. 双转子航空发动机整机振动建模与分析[J]. 振动工程学报, 2011, 24(6): 619-632.

CHEN Guo. Vibration modeling and analysis for dual-rotor aero-engine[J]. Journal of Vibration Engineering, 2011, 24(6): 619-632. (in Chinese)

[3] 陈果. 航空发动机整机振动耦合动力学模型及其验证[J]. 航空动力学报, 2012, 27(2): 241-254.

CHEN Guo. A coupling dynamic model for whole aero-engine vibration and its verification[J]. Journal of Aerospace Power, 2012, 27(2): 241-254. (in Chinese)

[4] 胡绚, 罗贵火, 高德平. 反向旋转双转子稳态响应计算分析与试验[J]. 航空动力学报, 2007, 22(7): 1044-1049.

HU Xuan, LUO Guihuo, GAO Deping. Numerical analysis and experiment of counter-rotating dual-rotor's steady-state response[J]. Journal of Aerospace Power, 2007, 22(7): 1044-1049. (in Chinese)

[5] Chiang H W D, Hsu C N, Tu S H. Rotor-bearing analysis for turbomachinery single-and dual-rotor systems [J]. Journal of Propulsion and Power, 2004, 20(6): 1096-1104.

[6] Sinou J J. Effects of a crack on the stability of a non-linear rotor system[J]. International Journal of Non-Linear Mechanics, 2007, 42(7): 959-972.

[7] AL-Shudeifat M A. On the finite element modeling of the asymmetric cracked rotor[J]. Journal of Sound and Vibration, 2013, 332(11): 2795-2807.

[8] ZHANG Huabiao, CHEN Yushu, LI Jun. Bifurcation on the synchronous full annular rub of a rigid-rotor elastic-support system[J]. Applied Mathematics and Mechanics: English Edition, 2012, 33(7): 812-827.

[9] Hou L, Chen Y, Cao Q. Nonlinear vibration phenomenon of an aircraft rub-impact rotor system due to hovering flight[J]. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2014, 19(1): 286-297.

[10] Zhou H L, Luo G H, Chen G, et al. Analysis of the nonlinear dynamic response of a rotor supported on ball bearings with floating-ring squeeze film dampers [J]. Mechanism and Machine Theory, 2013, 59: 65-77.

[11] 陈会征, 陈予恕. 航空发动机转子一种振动跳跃问题及其工程控制的分岔分析[J]. 航空动力学报, 2013, 28(12): 2781-2789.

CHEN Huizheng, CHEN Yushu. Analysis on bifurcation of a vibration jumping and engineering control in aero-engine[J]. Journal of Aerospace Power, 2013, 28(12): 2781-2789. (in Chinese)

[12] Nandi A, Neogy S. Modelling of rotors with three-dimensional solid finite elements[J]. The Journal of Strain Analysis for Engineering Design, 2001, 36(4): 359-371.

[13] 张力, 洪杰, 马艳红. 航空发动机转子系统建模方法和振动特性分析[J]. 北京航空航天大学学报, 2013, 39(2): 147-153.

ZHANG Li, HONG Jie, MA Yanhong. Modeling method and vibration characteristics of aero-engine rotor system [J]. Journal of Beijing University of Aeronautics and Astronautics, 2013, 39(2): 147-153. (in Chinese)

[14] 王国丽, 刘树辉, 朱清乐. 基于三维有限元模型的双转子-支承系统动力学特性研究[J]. 北京理工大学学报, 2011, 31(11): 1292-1296.

WANG Guoli, LIU Shuhui, ZHU Qingle. Study on dynamic characteristics of dual rotor-supporting system based on three-dimensional FEA model[J]. Transactions of Beijing Institute of Technology, 2011, 31(11): 1292-1296. (in Chinese)

[15] 刘长福, 邓明. 航空发动机结构分析[M]. 西安: 西北工业大学出版社, 2006.

[16] 邓明. 航空燃气涡轮发动机原理与构造[M]. 北京: 国防工业出版社, 2008: 87-156.

[17] 钟一鄂. 何衍宗. 转子动力学[M]. 北京: 清华大学出版社, 1987.

[18] 张文. 转子动力学基础[M]. 北京: 科技出版社, 1990.

(编辑: 秦理曼)